



Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen

... beschreibt folgenden Sachverhalt:

Sei L eine reguläre Sprache. [Dann gibt es eine Zahl (Konstante) $n \geq 1$, derart dass für alle Wörter (Zeichenreihen) w in L mit $|w| \geq n$ gilt, dass w in drei Wörter xyz zerlegbar ist so das gilt:

- 1.) $|y| \geq 1$
- 2.) $|xy| \leq n$
- 3.) Für alle $k \geq 0$ gilt, dass die Zeichenreihe xy^kz auch in L enthalten ist.]

[Dann gibt In L enthalten ist] := Pumping Lemma Eigenschaft (kurz: PLEig)

Beweisskizze zum Pumping Lemma:

Man macht sich leicht klar dass jede reguläre Sprache die PLEig besitzen muss. Jeder endliche Automat hat eine endliche Anzahl von Zuständen. Beim lesen eines Wortes w mit $|w| \geq |Q|$ durchläuft ein endlicher Automat $M = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ mindestens $|Q|+1$ Zustände. Also muss in so einem Fall mindestens ein $q \in Q$ zweimal durchlaufen werden. Demzufolge wird bei jeder Eingabe w mit $|w| \geq |Q|$ und $w \in L_M$ (L_M ist die Sprache die L akzeptiert) eine Folge von Zuständen $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m$ von M mit $q_1 = q_0$ durchlaufen mit der Eigenschaft dass in q_1, q_2, \dots, q_{m-1} eine Folge von Zuständen der Form $q_i q_{i+1} q_{i+2} \dots q_i$ mit $|q_i q_{i+1} q_{i+2} \dots q_i| \geq 2$ enthalten ist.

Wählt man also $n \geq |Q|$ so ist die Pumping Lemma Eigenschaft bezüglich jedes $w \in L_M$ mit $|w| \geq n$ erfüllt, da sich die in der PLEig geforderte Zerlegung xyz von w mit den in 1), 2) und 3) beschriebenen Eigenschaften stets finden lässt, wenn y aus den Zeichen besteht die beim immer existenten Zustandsübergang $q_i q_{i+1} q_{i+2} \dots q_i$ gelesen werden. In so einem Fall ist natürlich auch jedes xy^kz für alle $k \geq 0$ in L_M enthalten.

Für jede endliche Sprache gilt natürlich auch die Pumping Lemma Eigenschaft. Wenn man $n \geq \max \{ |w| \mid w \in L_M \} + 1$ wählt, dann ist $L = \{ w \mid |w| \geq n \} = \emptyset$ und die PLEig trivialerweise erfüllt.

Noch mal die Aussagen des Pumping Lemma:

Wenn eine Sprache L regulär ist, dann gibt es eine Zahl (Konstante) $n \geq 1$, derart dass für alle Wörter (Zeichenreihen) w in L mit $|w| \geq n$ gilt, das w in 3 Wörter xyz zerlegbar ist, so das: $|y| \geq 1$, $|xy| \leq n$ und für alle $k \geq 0$ gilt, dass die Zeichenreihe xy^kz auch in L enthalten ist.

Beweis der Nichtregulärität einer Sprache mit dem Pumping Lemma:

Das Pumping Lemma benutzt man um zu zeigen dass eine Sprache L nicht regulär ist. Dazu führt man einen indirekten Beweis. Man nimmt zunächst an das L regulär ist und widerlegt im Anschluss daran die PLEig für L , die L aufgrund der getroffenen Annahme besitzen muss. Ist dies gelungen, so hat man einen Widerspruch erhalten und die getroffene Annahme (L ist regulär) muss falsch gewesen sein. Damit muss gelten L ist nicht regulär.

Will man die PLEig für L widerlegen, so muss man zeigen dass die PLEig für L nicht gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn: „Für alle Zahlen (Konstanten) $n \geq 1$ ein Wort w in L existiert mit $|w| \geq n$, so das sich eine Zerlegung xyz mit $|x| \geq 1$ und $|xy| \leq n$ finden lässt, so das xy^kz nicht in L für ein $k \geq 0$ “

Aus den in den vorigen beiden Absätzen geschilderten Sachverhalten ergibt sich die Beweismethodik für den Fall das man die Nichtregulärität einer Sprache L zeigen will. Man geht wie folgt vor.

Zunächst nimmt man an L wäre regulär. Dann wählt man ein Wort w aus L in Abhängigkeit von n , so das $|w| \geq n$. Im Anschluss daran sucht man eine Zerlegung xyz von w die es gemäß dem Pumping Lemma geben muss mit den im Pumping Lemma beschriebenen Eigenschaften. Zu guter letzt braucht man nur noch ein $k \geq 0$ zu finden, so das xy^kz nicht in L ist (! Man sollte diesen Schritt argumentativ belegen !). Hat man die in diesem Absatz geschilderten Schritte vollzogen, ist die PLEig widerlegt. Die Annahme L ist regulär muss also falsch sein. Demzufolge ist L nicht regulär.

Beispiel zum Pumping Lemma:

Es ist zu zeigen das die Sprache $L = \{ uu \mid u \in \{0,1\}^* \}$ nicht regulär ist.

Annahme: L ist regulär.

Dann existiert eine Konstante n , so dass die PLEig für L gilt. Wir wählen $w = 0^n 1 0^n \in L$.

Gemäß der PLEig muss eine Zerlegung xyz für w existieren mit $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$ so das für alle $k \geq 0$ gilt: xy^kz ist in L . Aus $w = 0^n 1 0^n$, $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$ folgt einerseits das y nur 0en enthält und andererseits das y und damit auch xy mindestens eine null enthält. Des Weiteren enthält z aufgrund der gewählten Zerlegung und der Definition von L genau n Nullen.

Betrachte das Wort xy^0z . Es gilt: $|xy^0z|_0$ (Die Anzahl der in xy^0z vorkommenden Nullen) = $|xyz|_0 - |y^0|_0 \leq n-1$ (da in y mindestens eine 0 vorkommt) $\neq n$ = (Anzahl der in z vorkommenden Nullen). Somit kann xy^0z nicht in L sein, da jedes in L vorkommende Wort von der Form uu ist und jedes Wort, welches die Struktur von w besitzt, als Präfix zwei gleichlange Folgen von Nullen unterbrochen von einer eins enthalten muss um in L zu sein. Damit haben wir den gewünschten Widerspruch.

Daraus folgt: L ist nicht regulär.

Bemerkung: Zur Widerlegung der PLEig für L hätte man xyz auch anders „pumpen“ können. Wählt man xy^2z , so gilt: $|xy^2z|_0 = |xyz|_0 + |y^2|_0 \geq n+1$ (da in y mindestens eine 0 vorkommt) $\neq n$ = (Anzahl der in z vorkommenden Nullen). xy^2z ist natürlich ebenfalls nicht in L .

